

SZAKMAI ZÁRÓJELENTÉS

Az elmúlt év során végzett kutatásaink, valamint kapcsolódó tevékenységeink az alábbi nyolc fő csoportban foglalhatók össze:

- Yang-Mills-Higgs (YMH) rendszerek dinamikájának leírása
- YMH-rendszerek viselkedésének magyarázata
- Tömeges mezők aszimptotikus viselkedése
- Oszcillonok dinamikájának vizsgálata
- Gravitáció-anyag csatolt rendszerek vizsgálata
- Szimmetriák létezésének vizsgálata
- A kvantummechanika Károlyházy-féle modelljének vizsgálata
- Tudományos ismeretterjesztő film készítése

1. YMH-rendszerek dinamikájának leírása

Az elméleti fizikában egyre nagyobb jelentőséggel bírnak azok a modellek, illetve fizikai folyamatok, amelyekben nemlineáris effektusok tanulmányozására van szükség. Ilyen folyamatok jelennek meg például a csillagok gravitációs összeomlási folyamatának, a kapcsolt gravitációs sugárzási jelenségeknek, vagy éppen a részecskefizika szoliton-típusú megoldásainak tanulmányozása során. Ilyen típusú vizsgálatok során az analitikus eszközök önmagukban nem biztosítanak minden szempontból kielégítő leírást, így megbízható, az időfejlődést leírni képes numerikus módszerekre van szükség. Ezen igény kielégítésére, a lezárult OTKA pályázatunk során, egy olyan általános numerikus eljárást fejlesztettünk ki, amelynek segítségével különféle gömbszimmetrikus, nemlineáris hiperbolikus fejlődési egyenletnek eleget tevő dinamikai rendszerek evolúcióját tudjuk tanulmányozni. A sugárzási jelenségek hű leírását azzal biztosítottuk, hogy az evolúciót a konformisan átskálázott Minkowski-téridőben vizsgáltuk.

A fent említett általános numerikus módszerünket elsőként a részecskefizika szempontjából kitüntetett jelentőséggel bíró mágneses monopólusok dinamikai tulajdonságainak vizsgálatára használtuk fel. A kutatási időszak során időrendben a következő feladatokat hajtottuk végre:

2001-ben a Yang-Mills-Higgs rendszerek analitikus és numerikus vizsgálata terén a következő eredményeket értük el. Feltártuk a mágneses monopólusok dinamikájának leírásához szükséges modell matematikai és fizikai kereteit, illetve alkalmazhatóságának feltételeit. Meghatároztuk a vonatkozó mozgásegyenleteket, különös tekintettel azok konformis reprezentációbeli alakjára, melyek használata az aszimptotikus tulajdonságok feltárása során nélkülözhetetlen. A vizsgált rendszer viselkedését leíró téregyenletek nemlineáris hulláme egyenletek. Ezekből kiindulva egy hat változóra vonatkozó elsőrendű szimmetrikus hiperbolikus egyenletrendszert kaptunk. Tanulmányoztuk a vonatkozó hiperbolikus kezdőértékprobléma megoldhatóságának feltételeit.

A kutatási időszak első két évében egy C++ nyelven írt kódot sikerült kifejlesztelnünk, melynek segítségével gömbszimmetrikus SU(2) gauge-csoportú Yang-Mills és Higgs mezők csatolt rendszerének dinamikáját vizsgáltunk a Minkowski-téridő, mint fix geometriai háttér felett. Ezeket az egyenleteket egy negyedrendű diszkretizációs eljárás és a Runge-Kutta-féle időintegrálás, valamint az ún. „vonalak módszerére” épülő technikák együttes felhasználásával sikerült megoldanunk. Az időfejlődésre irányuló numerizálási eljárások kritikus pontja a számolási tartomány határán megadandó határfeltételek alkalmas kiválasztása. A vonatkozó problémát úgy oldottuk meg, hogy a Minkowski-téridő jövő fényszerű irányaihoz tartozó végtelenje is a véges rácsunk belsejében legyen ábrázolva. Ez biztosította azt, hogy a jövő fényszerű végtelen felé kimenő sugárzások kvantitatív elemzése is elvégezhető legyen az alkalmazott numerikus modell keretein belül.

Numerikus fejlesztőmunkánk során különféle konformis gauge-eket kellett találnunk ahhoz, hogy a kód megfelelően hosszú ideig leírja a fizikai fejlődést. Ez a megvalósult futtatások során a zérus nyugalmi tömegű mező hullámainak a fényszerű végtelenig való eljutásához szükséges (nemfizikai!) idő több százszorosát is elérte. A kódot kiegészítettük az energiamérleg ellenőrzésére alkalmas csomaggal, valamint elvégeztük a numerikus reprezentációnk konvergenciatulajdonságainak ellenőrzését.

A YMH rendszer tulajdonságainak feltárására irányuló konkrét vizsgálataink eredménye az alábbiak szerint foglalható össze: Egy kezdetben sztatikus SU(2) Bogomolny-Prasad-Sommerfield (BPS) mágneses monopólust egy hozzáadott nagy energiájú impulzus által gerjesztettünk. Azt tapasztaltuk, hogy az így kialakuló rendszer nem sugározza le teljesen a gerjesztő impulzus által közvetített energiát. Ehelyett a monopólus a dinamikai folyamat kezdetén a kapott energia közel felétől gyorsan megszabadul, majd egy nagyon hosszú élettartamú, kvázi-stabil "lélegző állapot" alakul ki a központi régióban, míg a távolabbi tartományokban nagyfrekvenciás rezgésekből felépülő, önhasznós módon táguló stabil héjak nagyon érdekes rendszere alakul ki. A vizsgált mennyiségek időbeni viselkedésére vonatkozóan az alábbi univerzális jellegű törvényszerűségeket kaptuk: A hiperboloidális felületekhez rendelhető összes energia, amely a "fényszerű végtelenbe" lesugárzott energia mértéke szerint csökken, $t^{-2/3}$ -os, míg a rezgések amplitúdója $t^{-5/6}$ -os időbeni lecsengést mutat.

1.1. További eredmények

A YMH-rendszerek evolúciójára vonatkozó korábbi vizsgálataink kiegészítéseként a kezdőadatok különféle paramétereinek változtatásával egyrészt a fent említett eredményeink általánosságát kívántuk megerősíteni, másrészt az alkalmazott "gerjesztési energia" növelésével az időfejlődés teljesen nemlineáris részének tulajdonságait kívántuk felderíteni.

A fenti eredményeken felül hozzáláttunk a kiválasztott dinamikai rendszer és az alkalmazott numerikus módszer mind teljesebbé tételéhez. Ennek keretében először az általános gömbszimmetrikus YMH rendszerek evolúciójának tanulmányozásának igénye merült fel. Ennek során a gömbszimmetria megtartása mellett a YMH-rendszerek összes lehetséges szabadsági fokait figyelembe vesszük. Az analitikus háttérszámolások elvégzése után jelenleg a numerikus

kódunk ezen általánosabb rendszerre kifejlesztett változatának a tesztelése van folyamatban. Ez konkrétan egy tizenhat változós, elsőrendű, szimmetrikus, hiperbolikus rendszer numerikus megoldását, illetve a fizikailag érdekes gauge-invariáns mennyiségek kiszámítását biztosítja.

A vizsgálatainkba bevont tömeges anyagmezők evolúciója során egyes tartományokban mind helyben, mind pedig időben egyre gyorsabban változó mezőértékek jelennek meg, ugyanakkor más tartományokban a dinamika kevésbé változatos. Éppen ezért numerikus módszerünket az "adaptív rácsfinomítás"-nak, (ARF)-nek nevezett eljárás felhasználásával szeretnénk képessé tenni arra, hogy az evolúció közben mindig a dinamika által megkövetelt helyen és mértékben önmaga tegye az alkalmazott numerikus rácsot a hű ábrázolásnak megfelelő finomságúvá. Jelenleg többek között egy ilyen adaptív rácsfinomítási eljárás fejlesztésén dolgozunk.

A BPS monopólus gerjesztéseinek vizsgálatára szorítkozó fentebb említett eredményünk származtatása során a Higgs-mező önkölcsönhatását "kikapcsoltuk". Az általános esetben ezt az önkölcsönhatást is figyelembe kell vennünk, ami az alábbi technikai jellegű általánosítás kidolgozását feltételezi. Ebben az esetben a kezdőadatok meghatározásánál fontos szerepet játszó sztatikus mágneses monopólusok is csak a vonatkozó elliptikus egyenletek numerikus megoldása révén kaphatók meg, így egy alkalmas eljárást kell kifejlesztenünk ezen megoldások előállítására is. Ezen felül ekkor mind a Yang-Mills, mind pedig a Higgs-mező tömegessé válik, azaz a tömeges mezők viselkedésének pontosabb leírására alkalmas, AMR módszerre épülő kódot kell alkalmaznunk.

2. YMH-rendszerek viselkedésének magyarázata

A numerikus vizsgálatok fent ismertetett eredménye adott inspirációt a monopólus mint dinamikai rendszer lineáris perturbációk felhasználására épülő analitikus tanulmányozásának elkezdéséhez is. Ezt a munkát végezte el Forgács Péter és Michael Volkov. A vonatkozó vizsgálatok eredményét az alábbiak szerint foglalhatjuk össze: A vizsgált YMH-rendszer viselkedését rezonáns (vagy kvázi-normál) állapotok végtelen rendszerével írhatjuk le. Ezen állapotok az izospin 1 perturbációs egyenletek kimenő sugárzási feltételnek eleget tevő sajátállapotai, melyek a komplex $E_n = \omega_n - i\gamma_n$ sajátértékkel jellemezhetőek. A sajátállapotok alaphfrekvenciája ω_n az $n \rightarrow 0$ határátmenetben a vektorbozon tömegéhez tart, míg az állapotok élettartama $1/\gamma_n$ meglepő módon végtelenhez közelít. A gerjesztett monopólus viselkedése a rezonancia-állapotok segítségével analitikusan jól értelmezhető. Ezeket felhasználva értelmezhető pl. a belső lélegző állapot kialakulása, valamint annak a numerikus vizsgálatokban tapasztalt $t^{-5/6}$ -os lecsengése is.

3. Tömeges mezők aszimptotikus viselkedése

A YMH rendszerek időfejlődésének numerikus vizsgálata során azt tapasztaltuk, hogy az aszimptotikus tartományban a tömeges Yang-Mills komponens nagyfrekvenciás rezgéseiből felépített gömbhéjak alakulnak ki. Ennek kapcsán

először numerikus zajra gyanakodtunk, de a konvergenciavizsgálataink meggyőztek arról, hogy Yang-Mills komponens ezen viselkedését valóban fizikainak kell tekintenünk. Ezt követően felmerült az a kérdés, hogy ez a jelenség a YMH rendszerekben fellelhető nemlinearitásoknak köszönhető, vagy esetleg ez a jelenség felléphet már egyszerű lineáris tömeges Klein-Gordon-mező időfejlődése során is. Ebben a vonatkozásban arra a meglepő eredményre jutottunk, hogy az említett gömbhéjakba rendeződés már a lineáris mezők esetében is kialakul. Ezt a Klein-Gordon-mező Green-függvényére alapozott megközelítéssel, a numerikus eljárásunktól független módon is ellenőrizni tudtuk. Szeretném megjegyezni, hogy ez a kitérő kiváló lehetőséget biztosított a numerikus módszerünk helyességének a korábban alkalmazottaktól eltérő újabb ellenőrzésére. A Green-függvény ismeretében az analitikus formulákból kiolvasható és a numerikus időfejlődés során a kódunk által kiszámolt egymásnak megfelelő mennyiségek minket is meglepő mértékben egyeztek meg. A Klein-Gordon-mező időfejlődése során megfigyelt jelenség analitikus magyarázatát is megtaláltuk.

4. Oszcillonok dinamikájának vizsgálata

A ϕ^4 -es önkölcsönható potenciállal rendelkező skalárelméletek egyik, meglepő tulajdonsága az, hogy egy kiterjedt tartományban igen hosszú élettartamú oszcilláló állapot alakulhat ki a rendszerben, amely közben nem, vagy csak nagyon kis mértékben ad át energiát a környezetének. E lokalizált rezgő állapotok között, a kezdőadatok finomhangolásával majdnem teljesen periodikus, ún. oszcillon típusú állapotok is kialakulhatnak. Ennek a rendszernek a numerikus és analitikus vizsgálatát Fodor Gyula, Forgács Péter és Rácz István a francia Philippe Grandclement-nel együttműködve végezte. Sikertült megmutatnunk, hogy a kialakuló hosszú élettartamú állapotok semmiképpen sem lehetnek periodikusak. Az eredetileg a Yang-Mills-Higgs-rendszerek időfejlődésének vizsgálatára kifejlesztett numerikus eljárásunk egyszerű adaptálása hasznosnak bizonyult ezen rendszer időfejlődésének tanulmányozása során is. Numerikus vizsgálataink megerősítették egy kváziperiodikus viselkedés kialakulásának lehetőségét, illetve lehetővé tették ezeknek az állapotoknak a pontos mennyiségi vizsgálatát is. Megmutattuk, hogy bár nagyon lassan, de a kialakult periodikusnak tűnő állapotok elbomlanak, azaz mind a frekvenciájuk, mind pedig a rezgési amplitúdójuk lassú, de határozott időbeni változást mutat. A vonatkozó eredmények publikálása folyamatban van.

5. Gravitáció-anyag csatolt rendszerek vizsgálata

Gravitációs szabadsági fokokat is tartalmazó rendszerek dinamikájának vizsgálatát végezte el Rácz István. A gravitációs szabadsági fokok "bekapcsolása" a hosszútávú tudományos terveinkben is kiemelt fontossággal bír. Erre irányuló törekvéseinkhez tartozó analitikus vizsgálatok eredményeit foglalja össze az utolsó publikációnk. Ismert, hogy a leggyakrabban használt gömbszimmetrikus gauge-ben (ez a metrika kanonikus alakjára épül) például egy, a gravitációhoz minimálisan csatolt skalártér esetén az Einstein-anyag rendszert leíró téregyenletek egy kevert elliptikus-hiperbolikus rendszert alkotnak. Az emlí-

tett munkánkban azt mutattuk meg, hogy ezeket az egyenleteket az evolúciós vektormező megfelelő megválasztása révén egy elsőrendű szimmetrikus, tisztán hiperbolikus rendszerrel helyettesíthetjük. Ez az eredmény különösen fontos, mivel egyrészt az ilyen típusú rendszerek esetében a kezdőérték-probléma jól kezelhető, másrészt a hiperbolikus egyenletek megoldásához szükséges számítógépes kapacitás lényegesen kisebb, mint az eredeti kevert elliptikus-hiperbolikus rendszer esetében volt, így az általunk kifejlesztett módszer lényegesen felgyorsíthatja a különféle csatolt gravitáció-anyagi rendszerek időfejlődésének numerikus vizsgálatát.

6. Szimmetriák létezésének vizsgálata

A Hawking-féle merevségi tételek terveink szerinti általánosítását készíti elő Rácz Istvánnak a *Symmetries of spacetimes and their relation to initial value problems* című dolgozatában közölt eredménye. Az említett merevségi tétel bizonyításának sarkalatos pontja egy ún. Killing-vektormező létezésének demonstrálása. Ezt egy alkalmas, a kérdéses esetben a karakterisztikus, kezdőértékprobléma keretein belül tettük meg. Rácz István idevágó eredménye tetszőleges kezdőértékproblémák és lényegében tetszőleges gravitáció-anyagi rendszerek diffeomorfizmus-invariáns modelljeinek esetére határozza meg azokat a feltételeket, amelyek különféle Killing-vektormezőket, azaz téridőszimmetriák létezését biztosíthatják. Pontosabban fogalmazva, ha a téridőben szimmetria létezik, akkor az a kezdőadatokból kiolvasható kell legyen. Az említett feltételek értelmében az összes fizikailag reális időfejlődési probléma alapegyenletei mindig biztosítják azt, hogy a kezdőadatokban potenciális jelenlevő téridőszimmetriák időfejlődés során kialakuló teljes téridőben is téridőszimmetriává váljanak.

Rácz István egy másik publikációja is ebbe a kutatási irányba illeszkedik. A vonatkozó munkában egy téridőszimmetria létezését kompakt Cauchy-horizontokat tartalmazó téridők esetére sikerült bizonyítani. Ezen eredmény a Penrose-féle erős kozmikus cenzor hipotézis igazolásához vezető gondolatsorban fontos építőelemként jelenik meg.

Rácz István jelenleg Robert Waldal és egy volt, illetve a jelenlegi posztdoktorával, Akihiro Ishibashi-val és Stefan Holland-dal, együttműködve a 4-nél magasabb dimenziós téridőkben talált, meglepően nagy számú és különleges fekete lyuk megoldásokra vonatkozó merevségi tétel bizonyításán dolgozik. Most készült el az az első, későbbi tudományos közlemény alapjául szolgáló összefoglalónk, amely már a legfontosabb eredmények bizonyítását is tartalmazza. Ebben megmutattuk, hogy a 4-dimenziós esethez hasonlóan minden stacionárius, de nem sztatikus, aszimptotikusan sík fekete lyuk téridőben a stacionárius Killing-vektormező mellett létezik legalább egy további forgási Killing-vektormező is, azaz minden említett téridő axi-stacionárius.

7. A kvantummechanika Károlyházy-féle modelljének vizsgálata

Károlyházy Frigyes 1966-ban javasolt, és 1974-re kidolgozott kvantummechanikai modelljében a szuperpozíció elv sérüléséhez nincs szükség klasszikus fizikai mérőműszerre vagy egy megfigyelő tudatára. A modellben mikroszkopikus rendszerek esetén a szuperpozíció elv megfigyelhetetlenül kis mértékben, makroszkopikus rendszerek esetén a tapasztalattal egyezően sérül.

A kutatási időszak első évében Frenkel Andor megmutatta, hogy a lokális $\hat{t}(\underline{x}, t)$ időoperátornak, valamint a Károlyházy-féle téridő vákuumállapotának milyen tulajdonságokkal kell rendelkezniük ahhoz, hogy a kvantummechanika Károlyházy-modelljének alapjául szolgáló $\Delta_L T \approx T_p^{2/3} T$ összefüggés teljesüljön. Itt $T_p \approx 5 \cdot 10^{44}$ másodperc a Planck-idő, $\Delta_L T$ pedig egy $T \gg T_p$ időintervallum határozatlanságának alsó korlátja.

A következő évben Frenkel Andor kutatásai természetes folytatásaként azon feltételek felkutatásához látott hozzá, amelyek azt garantálják, hogy az általa korábban javasolt lokális $\hat{t}(\underline{x}, t)$ időoperátor fogalma összeegyeztethető-e az egyik Salecker és Wigner által javasolt kvantum-mechanikai óra működésével.

Frenkel Andor 2003-ban kidolgozta az egy-térdimenziós Salecker-Wigner (S-W) –féle óramodell három-térdimenziós változatát, amely az óra alkatrészeinek a téridő szerkezetére gyakorolt hatását is figyelembe veszi. Az így nyert S-W óra segítségével lehetővé vált a Károlyházy-féle kvantummechanika $\Delta_L T \approx T_p^{2/3} T$ kiinduló összefüggésének minden eddiginél szigorúbb megalapozása.

Végül 2004-ben Frenkel Andor a Salecker-Wigner-féle óramodell további tulajdonságait vizsgálta. Salecker és Wigner ugyan hangsúlyozták annak a kérdésnek a fontosságát, hogy az általuk javasolt óra mikroszkopikus legyen, de csak makroszkopikus tömegű és méretű órára adtak példát. Frenkel Andor megmutatta, hogy egy Salecker-Wigner-féle óra csak úgy lehet mikroszkopikus – tömegét és méreteit tekintve –, ha nem túl pontos. Ha azonban makroszkopikus méreteket engedünk meg, akkor jó pontosság érhető el még mikroszkopikus tömegek esetén is.

8. Tudományos ismeretterjesztő film készítése

A kutatási időszak utolsó évében a témavezetőnek, Rácz Istvánnak lehetősége volt szűkebb szakterületünknek egy tudományos ismeretterjesztő film keretében történő bemutatására. Ez a film, melynek címe „Einstein befejezetlen szimfóniája”, az Einstein-féle gravitációelmélet, azaz az általános relativitáselmélet legújabb eredményeit mutatja be az érdeklődő, reményeink szerint sok középiskolást is magába foglaló nagyközönség számára. A film 52 perc terjedelmű. Elkészítéséhez és terjesztéséhez az OTKA támogatását is megkaptuk. A film az Einstein-elméletben leírt gravitációs hullámok detektálására irányuló nemzetközi erőfeszítések és a majdani asztrofizikai megfigyelésekben történő felhasználásának lehetőségeit mutatja be. Ennek előkészítése a szokásos tudományos ismeretátadási módszereinktől lényegesen eltérő technikákat és figyelmet igényelt. A film tematikájában az OTKA által támogatott kutatásaink és kutatási terve-

ink is megjelennek. Szeretném megjegyezni, hogy a jövőre vonatkozó terveinket lényegesen és pozitívan befolyásolják azok a szakmai találkozások, amelyekre a film készítése teremtett lehetőséget. Konkrétan a film készítése során kötött szakmai barátságok révén kutatócsoportunk meghívást kapott az Európai Unió által is finanszírozott VIRGO Gravitációs Hullámdetektor tudományos háttérét biztosító kutatóközösségek sorába. Így 2006-tól hivatalosan is aktív résztvevői lehetünk a VIRGO működéséhez kapcsolódó tudományos fórumoknak, mely várhatóan erősíti majd a kutatócsoportunk gravitációs hullámok vizsgálatára irányuló programjának mind intenzívebbé válását is.

A jelen pályázat tárgykörébe eső, az OTKA támogatásával létrejött kutatási eredményeket bemutató 3-4 jelentős közlemény, folyóiratcikk megírása még folyamatban van. Mivel ezek közzétételére várhatóan 2006 folyamán sor kerül, kérem, hogy a jelentésben foglaltak alapján született minősítést az OTKA egy kiegészítő eljárásban később, ezen közlemények figyelembevételével módosítsa!

Gödöllő, 2006. február 26.
Rácz István